

Matrice

NOTION DE MATRICE

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DEFINITION

On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ la donnée d'un ensemble de np coefficients de $\mathbf{K}$ rangés dans un tableau A de n lignes et p colonnes.

Les entrées de ce tableau (coefficients) sont numérotés avec deux indices :

- 1 Le premier indique le numéro de la ligne.
- 2 Le second indique le numéro de la colonne.

- On note alors

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- Par a_{ij} on désigne l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.
- On note $M_{n;p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$.

EXEMPLES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3;2}(\mathbb{C}); \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2;3}(\mathbb{R})$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3;3}(\mathbb{R}) = M_3(\mathbb{R}) \quad \text{matrice carrée d'ordre 3}$$
$$D = (\begin{array}{ccc} 2 & 7 & \sqrt{2} \end{array}) \in M_{1;3}(\mathbb{C}) \quad \text{matrice ligne}$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{3;1}(\mathbb{C}) \quad \text{matrice colonne}$$

EXEMPLES

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad \text{matrice triangulaire supérieure}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad \text{matrice triangulaire inférieure}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad \text{matrice diagonale}$$

EXEMPLES

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I_4 \quad \text{matrice identité de } M_4(\mathbb{R})$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: 0_{4;3} \quad \text{matrice nulle de } M_{4;3}(\mathbb{R})$$

$$M = (a_{jk})_{1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq 3}$$

Soit $a_{jk} = k^2 - j$, alors

$$M = (a_{jk})_{1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq 3} = \begin{pmatrix} 1^2 - 1 & 2^2 - 1 & 3^2 - 1 \\ 1^2 - 2 & 2^2 - 2 & 3^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calcul matriciel

ÉGALITÉ DES MATRICES

DEFINITION

Deux matrices A et B sont égales et on écrit $A = B$ si

- 1 elles ont même nombre de lignes ;
- 2 elles ont même nombre de colonnes ;
- 3 les coefficients à la même position sont égaux.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \left(a_{jk} = 2j + k + 1 \right)_{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3}$$

ADDITION DES MATRICES

On n'additionne que les matrices qui sont de même taille (même nombre de lignes et même nombre de colonnes).

DEFINITION

Si

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

sont deux matrices de taille $n \times p$ et à coefficients dans $\mathbf{K}$, alors la somme de A et B est la matrice

$$A + B = C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

de taille $n \times p$ dont chaque coefficient est somme des coefficients de même position de A et de B , i.e.,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Plus explicitement, on a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} .$$

EXAMPLES

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = ??$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+(-1) \\ 1+(-1) & 2+(-3) \\ -1+5 & -1+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+(-2) & -1+0 \\ 1+(-3) & 2+2 & -1+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

EXAMPLES

$$\begin{aligned} & \binom{2j - k + 1}{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3} + \binom{-j + 2k - 1}{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3} \\ &= \binom{[2j - k + 1] + [-j + 2k - 1]}{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3} \\ &= \binom{j + k}{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 1 & 1 + 2 & 1 + 3 \\ 2 + 1 & 2 + 2 & 2 + 3 \\ 3 + 1 & 3 + 2 & 3 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

PROPOSITION

Soient $A, B, C \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ trois matrices (de même taille). Alors

- ① $A + B = B + A$, on dit que l'addition dans $M_{n;p}(\mathbf{K})$ est commutative.
- ② $(A + B) + C = A + (B + C)$, on dit que l'addition dans $M_{n;p}(\mathbf{K})$ est associative.
- ③ $A + 0_{n;p} = A$, on dit que la matrice nulle 0 (à n lignes et p colonnes) est un élément neutre pour l'addition dans $M_{n;p}(\mathbf{K})$.
- ④ Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$, on définit $-A$ par $-A = (-a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$ de sorte que

$$A + (-A) = 0_{n;p}.$$

MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE

DEFINITION

Soit $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. La multiplication de la matrice A par le scalaire α est la matrice noté αA et obtenue en multipliant les coefficients de A par α . Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$, alors

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p} \in M_{n;p}(\mathbf{K}).$$

Plus explicitement, on a

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1p} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{np} \end{pmatrix}.$$

EXAMPLES

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times (-1) & 2 \times (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi \left(j + k \right)_{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3} &= \left([j + k] \pi \right)_{1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + 1)\pi & (1 + 2)\pi & (1 + 3)\pi \\ (2 + 1)\pi & (2 + 2)\pi & (2 + 3)\pi \\ (3 + 1)\pi & (3 + 2)\pi & (3 + 3)\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\pi & 3\pi & 4\pi \\ 3\pi & 4\pi & 5\pi \\ 4\pi & 5\pi & 6\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

PROPOSITION

Soient $A, B \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Alors

- ① $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$
- ② $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$
- ③ $(0)A = 0_{n;p}.$
- ④ $(-1)A = (-A).$
- ⑤ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$
- ⑥ $(1)A = A.$

PRODUIT D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Pour effectuer le produit d'une matrice ligne A par une matrice colonne B , il faut que le nombre de colonnes dans A soit exactement égale au nombre de lignes dans la matrice B . Autrement dit, la matrice ligne A et la matrice colonne B ont même nombre d'éléments.

DEFINITION

On a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1}.$$

EXAMPLES

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = ??$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (1)(1) + (-1)(1) + (1)(-1) + (2)(3) = 5$$

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UNE MATRICE COLONNE

Pour effectuer le produit d'une matrice A par une matrice colonne B , il faut que le nombre de colonnes dans A soit exactement égale au nombre de lignes dans la matrice B .

DEFINITION

Si $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ et $B \in M_{p;1}(\mathbf{K})$, alors le produit $AB = C$ est la matrice $C = (c_{j1})_{1 \leq j \leq n} \in M_{n;1}(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont donnés par

c_{j1} = le produit de la $j^{\text{ème}}$ ligne de A par la matrice colonne B .

Plus explicitement

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} \\ \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{np}b_{p1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

EXAMPLES

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = ??$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1)(-1) + 1 \cdot 1 + 2(-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0 \cdot 1 + 2(-1) \\ (-1) \cdot 1 + 3(-1) + 0 \cdot 1 + 1(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UNE MATRICE

Le produit de deux matrices A et B ne peut être effectué que si le nombre de colonnes de A soit exactement égale au nombre de lignes de B .

DEFINITION

Si $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ et $B \in M_{p;q}(\mathbf{K})$, alors le produit $AB = C$ est la matrice $C = (c_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq q} \in M_{n;q}(\mathbf{K})$ dont le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ème}}$ colonne est donné par

$c_{jk} =$ le produit de la $j^{\text{ème}}$ ligne de A par la $k^{\text{ème}}$ colonne de B .

Plus explicitement

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jp}b_{pk}.$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1q} + a_{12}b_{2q} + \cdots + a_{1p}b_{pq} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & \cdots & a_{21}b_{1q} + a_{22}b_{2q} + \cdots + a_{2p}b_{pq} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{np}b_{p1} & \cdots & a_{n1}b_{1q} + a_{n2}b_{2q} + \cdots + a_{np}b_{pq} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

EXAMPLES

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = ??$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1)1 + 1(-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-1)(-1) + 1(-1) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1)1 + 0(-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-1)(-1) + 0(-1) + 2 \cdot 1 \\ (-1)1 + 3 \cdot 1 + 0(-1) + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 3 + 3(-1) + 0(-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION : LE PRODUIT DES MATRICES EST

① Associative

$$A(BC) = (AB)C$$

pour $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$, $B \in M_{p;q}(\mathbf{K})$ et $C \in M_{q;m}(\mathbf{K})$.

② Distributive par rapport à l'addition

$$A(B + C) = AB + AC$$

pour $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ et $B, C \in M_{p;q}(\mathbf{K})$, et

$$(A + B)C = AC + BC$$

pour $A, B \in M_{n;p}(\mathbf{K})$, $C \in M_{p;q}(\mathbf{K})$.

③ Compatible avec la multiplication un scalaire

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

pour $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$, $B \in M_{p;q}(\mathbf{K})$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.

DÉFAUTS DU PRODUIT

- ① Le produit des matrices n'est pas commutatif

$$AB \neq BA.$$

En effet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ② Le produit de deux matrices peut-être nul sans que l'une des matrices ne soit nulle.

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \quad \text{où} \quad B = 0.$$

En effet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

MATRICES IDENTITÉ

Une matrice identité est une matrice carrée diagonale dont les coefficients sont égaux à 1.

① La matrice identité de $M_3(\mathbf{K})$ est

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

② La matrice identité de $M_4(\mathbf{K})$ est

$$I_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

PROPOSITION

- ① Pour toute matrice $A \in M_{n;p}(\mathbf{K})$ et matrice identité $I_p \in M_{p;p}(\mathbf{K})$, on a

$$AI_p = A.$$

- ② Pour toute matrice carrée $A \in M_{p;p}(\mathbf{K})$ et matrice identité $I_p \in M_{p;p}(\mathbf{K})$, on a

$$AI_p = A = I_pA.$$

PUISSANCE D'UNE MATRICE

Pour calculer les puissances d'une matrice A , il faut qu'il soit une matrice carrée.

Si A et B sont deux matrices carrées de même taille, alors

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et on a

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

seulement lorsque $AB = BA$.

Plus généralement, on a

PROPOSITION

Soit A et B deux matrices carrées qui commutent entre eux, $AB = BA$. Alors pour tout entier n , on a

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

avec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En particulier, pour toute matrice carrée A on a

$$(A + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k.$$

Matrice inversible

MATRICE INVERSIBLE

DEFINITION

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice carrée B de même taille que A vérifiant

$$AB = I_n = BA.$$

On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1} . Cet inverse est unique.

EXEMPLES :

$$I_n^{-1} = I_n.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{si } \alpha, \beta, \gamma, \lambda \text{ sont non nuls.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION

- ① Pour toute matrice carrée inversible $A \in M_{n;n}(\mathbf{K})$ et tout scalaire non nul $\lambda \in \mathbf{K}^*$, on a

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

- ② Pour deux matrices carrées inversibles de même taille $A, B \in M_{n;n}(\mathbf{K})$, on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

- ③ Pour toute matrice carrée inversible $A \in M_{n;n}(\mathbf{K})$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$