

Espaces vectoriels

Un **IK-espace vectoriel** est un ensemble non vide E muni :

- d'une loi de composition interne (L.C.I) qui est une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

- d'une loi de composition externe (L.C.E) qui est une application de $\text{IK} \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} \text{IK} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda.u \end{aligned}$$

IK est un corps (souvent $\text{IK} = \mathbb{R}$)

Définition

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe de domaine $\mathbb{IK}$ notée $.$

$(E, +, .)$ est un $\mathbb{IK}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{IK}$) si et seulement si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
- $1_{\mathbb{IK}}.u = u$ (pour tout u de E)
- $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$ (pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{IK}$, $u \in E$)
- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \beta.v$ (pour tous $\alpha \in \mathbb{IK}$, $u, v \in E$)
- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$ (pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{IK}$, $u \in E$)

- Les éléments de E sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.
- L'élément neutre 0_E s'appelle aussi le vecteur nul.
- Le symétrique $-u$ d'un vecteur u de E s'appelle aussi l'opposé.
- La loi de composition interne sur E , notée $+$, est l'addition.
- La loi de composition externe sur E est la multiplication par un scalaire.

Exemple fondamental : Le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

- Posons $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $E=\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2=\{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- Un élément u de E est donc un couple (x,y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$.
- La loi interne :
Si (x,y) et (x',y') sont deux éléments de E , alors :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in E$$

- La loi externe :
Si λ est un réel et (x,y) un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

- L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0,0)$
- Le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$, que l'on note aussi $-(x,y)$

Exemple 2 : Le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- La loi interne :

Pour $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f + g$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La loi externe :

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\lambda.f$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$$

- L'élément neutre de la loi interne est la fonction nulle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$$

- Le symétrique de n'importe quelle fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la fonction g de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x)$$

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Proposition

- $\alpha.(u - v) = \alpha.u - \alpha.v$
- $(\alpha - \beta).u = \alpha.u - \beta.u$

Conséquences :

- $0_{\mathbb{K}}.u = 0_E \quad \alpha.0_E = 0_E$
- $\alpha.(-u) = -\alpha.u \quad (-\alpha).u = -\alpha.u$

Théorème

$$\alpha.u = 0 \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad u = 0_E$$

Un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Définition

Une partie F de E est appelée un **sous-espace vectoriel** si :

- $0_E \in F$
- $u + v \in F$ pour tous u, v de F
- $\alpha.u \in F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$

Exemple1

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
car :

- $(0, 0) \in F$
- Si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F , alors
 $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$, donc
 $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$, et ainsi
 $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F
- Si $u = (x, y) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
 $x + y = 0$ donc $\alpha x + \alpha y = 0$
D'où $\alpha \cdot u \in F$

Exemple2

L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- La fonction nulle est continue
- La somme de deux fonctions continues est continue
- Une constante fois une fonction continue est une fonction continue

Exemple3

- $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$
En effet, le vecteur nul $(0, 0) \notin F_1$
- $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$
En effet, $u = (2, 0)$ et $v = (0, 2) \in F$ mais $u + v = (2, 2) \notin F$
- $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$
En effet, $u = (2, 3) \in F$, mais pour $\alpha = -2$,
 $-2u = (-4, -6) \notin F$

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est lui même un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel pour les lois induites par E .

Pour montrer que F est un espace vectoriel :

- Trouver un espace vectoriel E contenant F
- Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E

Est-ce que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires forme un espace vectoriel ?

- $\mathcal{P}$ sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$

$\mathcal{P}$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

- ① La fonction nulle est une fonction paire
- ② Si $f, g \in \mathcal{P}$ alors $f + g \in \mathcal{P}$
- ③ Si $f \in \mathcal{P}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow \mathcal{P}$ est un espace vectoriel

Combinaison linéaire

Soient $v_1, v_2, \dots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E

Définition

- Tout vecteur de la forme

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$.

- Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de la combinaison linéaire

Si $n = 1$, alors $u = \alpha_1 v_1$ et on dit que u est colinéaire à v_1

- ① Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $(2, 2, 1)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ car on a

$$(2, 2, 1) = 2(1, 1, 0) + (0, 0, 1)$$

- ② Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$$

Alors la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 car

$$f = 2f_3 - 4f_2 + f_1 - f_0$$

- Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$
- Montrons que $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de u et v
- On cherche donc α et β tel que $w = \alpha u + \beta v$
- $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\beta \\ 4\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 6\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ -\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$
- Equivaut à

$$\begin{cases} 9 &= \alpha + 6\beta \\ 2 &= 2\alpha + 4\beta \\ 7 &= -\alpha + 2\beta \end{cases}$$
- Une solution de ce système est $(\alpha = -3, \beta = 2)$
- w est combinaison linéaire de u et v car $w = -3u + 2v$

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F une partie non vide de E .
 F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\alpha u + \beta v \in F \text{ pour tous } u, v \in F \text{ et tous } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F .

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E

Proposition

L'intersection de $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

- ① $0_E \in F, 0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$
- ②
 - Soient $u, v \in F \cap G$
 - F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$
 - De même $u, v \in G$ implique $u + v \in G$
 - Donc $u + v \in F \cap G$
- ③
 - Soient $u \in F \cap G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$
 - F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\alpha u \in F$
 - De même $u \in G$ implique $\alpha u \in G$
 - Donc $\alpha u \in F \cap G$

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$
- $(0, 1) \in F, (1, 0) \in G$
- $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin F \cup G$
- $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E

Définition

L'ensemble de tous les éléments $u + v$ où u est un élément de F et v un élément de G , est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G

$$F + G = \{u + v / u \in F, v \in G\}$$

Proposition

- $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E
- $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G

Exemple1

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z = 0\}$

- Un élément w de $F + G$ s'écrit $w = u + v$ où $u \in F$ et $v \in G$
- Comme $u \in F$, $u = (x, 0, 0)$
- Comme $v \in G$, $v = (0, y, 0)$
- Donc $w = (x, y, 0)$
- $F + G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$

Exemple2

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$
Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$

- Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- $w = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0)$ avec $(0, y, z) \in F$ et $(x, 0, 0) \in G$
- $w \in F + G$
- Ecriture pas unique :
 $(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (1, 0, 0) = (0, 2, 1) + (1, 0, 2)$

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E

Définition

F et G sont en somme directe dans E si

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F + G = E$

On note alors $F \oplus G = E$

On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E

Proposition

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G

- Si $\begin{cases} w = u + v \\ w = u' + v' \end{cases}$ avec $\begin{cases} u \in F, v \in G \\ u' \in F, v' \in G \end{cases}$ alors $\begin{cases} u' = u \\ v' = v \end{cases}$

- ① $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\}$
- $F \oplus G = \mathbb{R}^2$?
 - $F \cap G = \{(0, 0)\}$
 - $F + G = \mathbb{R}^2$ car $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$
 - Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
 - Autre méthode : la décomposition $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ est unique
- ② Gardons F et notons $G' = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$.
On a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$, car
- $F \cap G' = \{(0, 0)\}$
 - $F + G' = \mathbb{R}^2$, En effet, $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$

Sous-espace engendré

Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E

Théorème

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est un sous-espace vectoriel de E
- C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

C'est le sous-espace engendré par $v_1, \dots, v_n$, noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

$$u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Exemples

① Droite vectorielle $\text{Vect}(u) = \{\alpha u / \alpha \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u \quad (u \neq 0_E)$

② $\text{Vect}(u, v) = \{\alpha u + \beta v / \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$

Si u et v ne sont pas colinéaires, c'est un plan vectoriel

③ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathcal{P} = \text{Vect}(u, v)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v \text{ pour certains } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = \alpha + 3\beta \end{cases}$$

Equation cartésienne $x - 2y + z = 0$

④ $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$
 $\text{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \{f / f(x) = ax^2 + bx + c\} = \mathbb{R}_2[x]$

Combinaison linéaire (Rappel)

- Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E (p \geq 1)$
- Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$

Définition

- Le vecteur

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$

- Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont les coefficients de la combinaison linéaire

Famille libre

Définition

Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une famille libre (ou linéairement indépendante) si toute combinaison linéaire nulle

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0_E$$

implique que tous ses coefficients sont nuls, c'est à dire

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

Remarque

- Si la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E n'est pas libre, on dit que la famille est liée ou linéairement dépendante
- Dans ce cas, il existe une combinaison linéaire nulle de $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ avec au moins un coefficient non nul

Exemple

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Est-ce une famille libre ou liée ?
- On a

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- Après résolution, on obtient

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Le système a une infinité de solutions

- Par exemple $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_1 = -2$

- La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est donc une famille liée

Exemple2

- La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre ou liée?
- On résout le système
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$
 et on trouve
comme unique solution $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$
- Alors, c'est une famille libre

- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on considère :

$$P_1(X) = 1 - X$$

$$P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$$

$$P_3(X) = 1 + 3X - X^2$$

- $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$
- $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille liée

Famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs de E

Définition

La famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_p$, c'est à dire :

$$\forall v \in E \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K} \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$$

Exemple

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- La famille $\{v_1, v_2\}$ est elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

- $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution

- $\{v_1, v_2\}$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

Soit $E = \mathbb{R}^2$

- ①
 - $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - $\{v_1, v_2\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ②
 - $v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - La famille $\{v_1', v_2'\}$ est elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?
 - $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha v_1' + \beta v_2' \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = x \\ \alpha + \beta = y \end{cases}$
 - $\alpha = x - y \quad \beta = -x + 2y$
 - $\{v_1', v_2'\}$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow$ Il existe plusieurs familles génératrices de $\mathbb{R}^2$

La base

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Définition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice

Théorème

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E . Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

Autrement dit, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

Exemple

❶ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$

❷ $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$

❸ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Exemples

- ① $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
- ② $(1, 1 + X, 1 + X + X^2, \dots, 1 + X + X^2 + \dots X^n)$ autre base de $\mathbb{R}_n[X]$

Théorème

Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base

Définition

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de dimension finie

Théorème

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments

Définition

La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E , notée $\dim E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E

Exemple

- La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, alors $\dim \mathbb{R}^2 = 2$
- Les vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$
- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ car $\text{Card}\{1, X, X^2, \dots, X^n\} = n + 1$

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n

Théorème

$\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E

Il y a équivalence entre :

- (i) $\mathcal{F}$ est une base de E
- (ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E
- (iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E

Exemple

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$

- Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $\text{Card} \{v_1, v_2, v_3\} = 3$

- À quelle condition la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ?

- Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + t\alpha_2 + t\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ (t-4)\alpha_2 + (t-4)\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ (t-4)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base si et seulement si $t \neq 4$

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie

Théorème

- ① Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie
- ② $\dim F \leq \dim E$
- ③ $\dim E = \dim F \Leftrightarrow F = E$

Corollaire

Soient F et G sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E avec F de dimension finie et $G \subset F$, Alors :

$$F = G \Leftrightarrow \dim F = \dim G$$

- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y + z = 0 \right\}$
- $G = \text{Vect}(u, v) \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Est-ce que $F = G$?
 - $\dim G = 2$ car u et v ne sont pas colinéaires
 - $u \in F, v \in F$ donc $G \subset F$
 - $\dim F < \dim \mathbb{R}^3 = 3$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$
 - $\dim F \geq \dim G = 2$ car $G \subset F$
 - $G \subset F, \dim G = \dim F = 2 \Rightarrow G = F$