

E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (Généralement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition

Une application f de E dans F est dite linéaire si :

- ❶ $\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$
- ❷ $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} f(\lambda u) = \lambda f(u)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque

On dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.

Définition

Soit f une application linéaire de E dans F

- Si $F = E$, on dit que f est un **endomorphisme**

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$

- Si f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme**
- Si f est bijective et $E = F$, on dit que f est un **automorphisme**

Exemple (Exemple 1)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x + y) &= a(x + y) \\ &= (ax) + (ay) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= a(\lambda x) \\ &= \lambda(ax) \\ &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Exemple (Exemple 2)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y, 2y) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

$$\textcircled{1} \text{ Mq } f((x, y) + (x', y')) = f(x, y) + f(x', y')$$

$$\begin{aligned} f((x, y) + (x', y')) &= f(x+x', y+y') \\ &= ((x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y'), 2(y+y')) \\ &= ((x+y)+(x'+y'), (x-y)+(x'-y'), 2y+2y') \\ &= ((x+y), (x-y), 2y) + ((x'+y'), (x'-y'), 2y') \\ &= f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ Mq } f(\lambda(x, y)) = \lambda f(x, y)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda y) \\ &= \lambda(x+y, x-y, 2y) \\ &= \lambda f(x, y). \end{aligned}$$

Proposition (Caractérisation usuelle des applications linéaires)

Une application f de E dans F est dite linéaire si :

$$\forall (u, v) \in E^2 \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Proposition

Si f est une application linéaire de E dans F , alors

- $f(u - v) = f(u) - f(v), \quad \forall (u, v) \in E^2$
- $f(-u) = -f(u), \quad \forall u \in E$
- $f(0_E) = 0_F$ **Important !!!**

Exemple (Exemple)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y, 2y + 1) \end{aligned}$$

f n'est pas une application linéaire. en effet :

$$f(0_{\mathbb{R}^2}) = f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Exemple (Exemple)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y, 2y + 1) \end{aligned}$$

f n'est pas une application linéaire. en effet :

$$f(0_{\mathbb{R}^2}) = f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Proposition (Composée de deux applications linéaires)

Soient E , F , et G des espaces vectoriels.

Si f est une application linéaire de E dans F et g est une application linéaire de F dans G , alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Proposition (combinaison de deux applications linéaires)

Soient E et F deux espaces vectoriels .

Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F , alors

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est une application linéaire de E dans F .

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle

- ① **Noyau de f** : l'ensemble $\{u \in E / f(u) = 0_F\}$.
On le note $\ker(f)$.
- ② **Image de f** : l'ensemble
 $\{v \in F / \exists u \in E \text{ tel que } v = f(u)\} = f(E)$.
On le note $\text{Im}(f)$.
- ③ Ou bien $\text{Im}(f) = \{f(u); u \in E\} = f(E)$. (pratique)

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle

- ❶ **Noyau de f** : l'ensemble $\{u \in E / f(u) = 0_F\}$.
On le note $\ker(f)$.
- ❷ **Image de f** : l'ensemble
 $\{v \in F / \exists u \in E \text{ tel que } v = f(u)\} = f(E)$.
On le note $\text{Im}(f)$.
- ❸ Ou bien $\text{Im}(f) = \{f(u); u \in E\} = f(E)$. (*pratique*)

Exemple (Exemple)

Déterminons le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\ker(f) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}.$$

Exemple (Exemple)

Déterminons le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\ker(f) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}.$$

Exemple (Exemple)

Déterminons le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\ker(f) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}.$$

Exemple (Exemple)

Déterminons le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\ker(f) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}.$$

Exemple (Exemple)

Déterminons le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\ker(f) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}.$$

Exemple (Exemple)

Déterminons le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\ker(f) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}.$$

Exemple (Exemple)

Déterminons l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x + y, x + y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1) + y(1, 1); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Tant que la famille $\{(1; 1); (1; 1)\}$ est liée, en éliminant l'un des deux, on obtient un système libre $\{(1; 1)\}$.

donc

$$\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 1)\}$$

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- ❶ *$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .*
- ❷ *$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .*
- ❸ *f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$*
- ❹ *f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$*

Exemple (Exemple 1)

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

① On a $\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 1)\}$

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ n'est pas surjective

② On a $\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}$

$\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1, -1)\} \neq (0, 0) \Rightarrow f$ n'est pas injective.

Exemple (Exemple 1)

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

① On a $\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 1)\}$

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ n'est pas surjective

② On a $\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}$

$\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1, -1)\} \neq (0, 0) \Rightarrow f$ n'est pas injective.

Exemple (Exemple 1)

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

① On a $\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 1)\}$

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ n'est pas surjective

② On a $\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}$

$\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1, -1)\} \neq (0, 0) \Rightarrow f$ n'est pas injective.

Exemple (Exemple 1)

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x + y). \end{aligned}$$

① On a $\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 1)\}$

$\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ n'est pas surjective

② On a $\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1; -1)\}$

$\text{ker}(f) = \text{vect}\{(1, -1)\} \neq (0, 0) \Rightarrow f$ n'est pas injective.

Exemple (Exemple 2)

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y) / f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = (0, 0) &\Leftrightarrow (x + y, x - y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y = 0; x - y = 0) \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(0, 0)\} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow$$

ce qui implique que f est injective.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x + y, x - y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1) + y(1, -1); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Tant que la famille $\{(1; 1); (1; -1)\}$ est libre, donc

$$\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 1), (1; -1)\}$$

et tant que $\dim(\text{Im}f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ ce qui implique que f est **surjective**.

f bijective $\Rightarrow f$ automorphisme de $\mathbb{R}^2$

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie alors

$$\dim E = \operatorname{rg}(f) + \dim(\ker f)$$

avec

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

Exemple

Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, y - z). \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{(x, y, z) / f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (0, 0) &\Leftrightarrow (x - y, y - z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y = 0; y - z = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = y = z) \Leftrightarrow \ker(f) = \{(x, y, z) / x = y = z\} = \{x(1, 1, 1) / x \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

donc

$$\ker(f) = \text{vect}\{(1; 1; 1)\}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker f) = 1$$

ce qui implique que f n'est pas **injective**.

$$\begin{aligned} f : \quad (R^3) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, y - z). \end{aligned}$$

Selon le théorème du rang

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{ker}f)$$

Or $\dim(\text{ker}f) = 1$ donc

$$3 = \dim(\text{Im}f) + 1$$

ce qui implique que

$$\dim(\text{Im}f) = 2 \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$$

donc f est surjective.

$$\begin{aligned} f : \quad (\mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, y - z). \end{aligned}$$

Selon le théorème du rang

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f)$$

Or $\dim(\text{Ker} f) = 1$ donc

$$3 = \dim(\text{Im} f) + 1$$

ce qui implique que

$$\dim(\text{Im} f) = 2 \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$$

donc f est **surjective**.

Autrement : pour déterminer $\text{Im}(f)$ par une autre méthode :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \{f(x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x - y, y - z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1, 0) + y(-1, 1) + z(0, -1); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}\end{aligned}$$

Tant que la famille $\{(1, 0); (-1, 1); (0, -1)\}$ est liée, en éliminant l'un des trois, on obtient un système libre, donc

$$\text{Im}(f) = \text{vect}\{(1; 0), (-1; 1)\}$$

et vu que $\dim(\text{Im}f) = 2 = \dim(\mathbf{R}^2)$ donc $\text{Im}(f) = \mathbf{R}^2$ ce qui implique que f est **surjective**.